



TITLE:

# Chain recurrence と P.O.T.P.(力学系理論と特異現象)

AUTHOR(S):

下村, 尚司

---

CITATION:

下村, 尚司. Chain recurrence と P.O.T.P.(力学系理論と特異現象). 数理解析研究所講究録 1986, 602: 228-243

ISSUE DATE:

1986-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99628>

RIGHT:

# Chain recurrence と P.O.T.P.

名大理 下村 尚司

Takashi Shimomura

## §1 basic facts and definitions.

$(X, d)$  を metric  $d$  を持つ compact metric space とする。  $f: X \rightarrow X$  を continuous surjection とする。  
 $\alpha > 0, x, y \in X$  とする。  $\{x_0, \dots, x_m\}$  ( $x_i \in X$ ) が  $x$  から  $y$  への  $\alpha$ -chain とは、  $x = x_0, y = x_m$  で、  $d(f(x_{i-1}), x_i) < \alpha$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) が満たされることを言う。  $m+1$  をその長さと言う。  
 $\alpha > 0$  に対し  $x$  から  $y$  への  $\alpha$ -chain 及び  $y$  から  $x$  への  $\alpha$ -chain が存在するとき、  $x \asymp y$  と書く。任意の  $\alpha > 0$  に対し  $x \asymp y$  となるとき  $x \sim y$  と書き、  $x$  と  $y$  が chain equivalent であると言う。 $x \sim x$  のとき  $x$  は chain recurrent であると言い  $R(f) = \{x \in X, x \sim x\}$  とかく。

$R(f)$  は closed set であり  $\sim$  は  $R(f)$  の equivalence relation である。 $\sim$  の equivalence class を chain component と呼ぶ。  
 chain component は closed set である。

Lemma 1.  $f(R(f)) \subset R(f)$ 。

Proof.  $x \in R(f)$  とする。 $\alpha > 0$  を任意に固定する。 $\delta > 0$  を、  
 $d(y, z) < \delta$  なら  $d(f(y), f(z)) < \alpha$  となるように固定する。

$\{x_0, \dots, x_m\}$  を  $x$  から  $x$  への  $\delta$ -chain とする。このとき  $\{f(x_0), \dots, f(x_m)\}$  は  $f(x)$  から  $f(x)$  への  $\alpha$ -chain である。 $\alpha$  は任意だから求めることを得る。  $\square$

Th. 2. (C. Robinson [2])  $R = R(f)$  とするとき、 $R(f|_R) = R(f)$ 。

Proof. [3] p. 429 と同様  $\square$

Remark.  $f(R(f)) = R(f)$ 。

Prop. 3.  $F$  を chain component とすると  $f(F) = F$ 。

Proof.  $x \in F$  とする。 $\alpha > 0$  とする。 $f(x)$  から  $x$  への  $\alpha$ -chain があることを示す。 $0 < \delta < \alpha/2$  を  $d(y, z) < \delta$  なら

$d(f(y), f(z)) < \alpha/2$  となるようにとる。 $x = x_0 = x_m$  なる  $\delta$ -chain  $\{x_1, \dots, x_m\}$  をとる。このとき  $\{f(x), x_2, \dots, x_m\}$  が  $\alpha$ -chain であることが容易に確かめられる。よって  $f(F) \subset F$ 。  $\square$

Def.  $f$  が chain transitive とは、任意の  $x, y \in X$  に対して  $x \sim y$  が成立することを見る。closed set  $Y \subset X$  が chain transitive とは  $f(Y) = Y$  で  $f|_Y$  が chain transitive であることを言う。

Prop. 4.  $F$  を chain component とすると  $F$  は chain transitive

証明の概略。 $x, y \in F$  とする。各  $m \in \mathbb{N}$  に対し  $C_m = \{x_0^m, \dots, x_m^m\}$  を  $x$  から  $y$  を通って  $x$  にもどる  $1/m$ -chain とする。 $\mathcal{C}(X)$  を  $X$  の non-empty closed set の集合とする。 $\bar{d}$  を  $\mathcal{C}(X)$  上の Hausdorff metric とする。すると、 $(\mathcal{C}(X), \bar{d})$  は compact なので subsequence

$C_{m_k}$  が存在し  $C_{m_k} \rightarrow^q C \in \mathcal{C}(X)$  となる。このとき  $C \ni x, y$  で、 $C$  が chain transitive であることが示される。よって  $C \subset F$  であり、 $F$  が chain transitive であることが分る。[2] 参照。

Prop. 5.  $f$  が homeomorphism のとき  $\#(R(f)/\sim) = 1$  なら  $X = R(f)$ 。

Proof.  $x \in X \setminus R(f)$  とする。  $R(f) \cap \Omega(f)$  (ここで  $\Omega(f)$  は  $f$  の non-wandering set) だから、 $\alpha(x) \subset R(f)$ ,  $\omega(x) \subset R(f)$  である。(ここで  $\alpha(x)$  は  $x$  の  $\alpha$ -limit set,  $\omega(x)$  は  $x$  の  $\omega$ -limit set)。  
今  $R(f)$  が chain component だから  $x \in R(f)$ 、これは矛盾。  $\square$

Remark. Prop. 5 は  $f$  が continuous surjection のときも成立する。

Prop. 6.  $R(f)$  が connected なら  $\# R(f)/\sim = 1$  特 に  $X = R(f)$ 。

Proof.  $\alpha > 0$  とする。  $x \in R(f)$  に対して  $E(x, \alpha) = \{y \in R(f); x \sim_\alpha y\}$  とかく。各  $E(x, \alpha)$  が open set であることを示せばよい。  
 $x \in X$  を固定する。  $x \sim_\alpha y$  とし、 $x$  から  $y$  への  $\alpha$ -chain を  $\{x_0, \dots, x_m\}$  とする。  $d(f(x_{m-1}), x_m) < \alpha$  だから  $x_m = y$  の近傍  $U_1$  があって  $d(f(x_{m-1}), z) < \alpha \quad \forall z \in U_1$  となる。このとき  $\{x_0, \dots, x_{m-1}, z\}$  は  $x$  から  $z$  への  $\alpha$ -chain である。次に  $y$  から  $x$  への  $\alpha$ -chain を  $\{y_0, \dots, y_n\}$  とする。  $d(f(y_0), y_1) < \alpha$  だから  $y_0 = y$  の近傍  $U_2$  があって  $d(f(z), y_1) < \alpha \quad \forall z \in U_2$  となる。よって  $U = U_1 \cap U_2$  とすると  $U \subset E(x, \alpha)$ 、よって  $E(x, \alpha)$  は open set。  $\square$

## § 2 finite chain components.

M. Hurley [2] は compact manifold 上の topologically

stable diffeomorphism が有限個の chain components を持つことを示した。ここでは  $\#(R(f)/\sim) < \infty$  であるような  $f$  が  $X$  が connected である場合に持つ性質のいくつかを chain component の観点から調べる。

Th. 7.  $f$  が homeo. とする。  $F$  が chain component で  $F$  の開近傍  $U$  があって  $(R(f) \setminus F) \cap \bar{U} = \emptyset$  であり任意の  $x \in X \setminus F$  に対して  $\alpha(x) \cap F = \emptyset$  ならば、  $F$  は attractor。 (定義については [1] 参照。)

Proof.  $F$  が attractor でないとする。  $\varepsilon > 0$  を  $d(x, F) < \varepsilon \Rightarrow x \in U$  となるようにとる。各  $m \in \mathbb{N}$  に対し  $V_m = \{x; d(x, F) < \frac{\varepsilon}{m}\}$  とおく。

$\bar{U} \cup f(\bar{U})$  の近傍  $U'$  を  $(R(f) \setminus F) \cap \bar{U}' = \emptyset$  となるようにとる。

$\omega(V_m) = \bigcap_{k \geq 0} \overline{\bigcup_{k \geq 1} f^k(V_m)}$  とおく。仮定より  $\omega(V_m) \supset F$  ( $\forall m \in \mathbb{N}$ ) である。もし  $\omega(V_m) \subset \bar{U}$  とすると  $F$  は  $\omega(V_m)$  に含まれる唯一の chain component である。よって  $f(\omega(V_m)) = \omega(V_m)$  に注意すると、Prop. 5 より  $\omega(V_m) = F$  となる。これは仮定に反する。よって  $\gamma \in \omega(V_m) \cap \bar{U}^c$  がある。  $\delta > 0$  があって  $U_\delta(\gamma) \subset \bar{U}^c$  となる (ここで  $U_\delta(\gamma) = \{z \in X; d(\gamma, z) < \delta\}$ )。  $x_m \in V_m$  と  $k \in \mathbb{N}$  があって  $f^k(x_m) \in U_\delta(\gamma)$  となる。  $k_m = \min \{k \in \mathbb{N}; f^k(x_m) \in U_\delta(\gamma)\}$  とおき  $y_m = f^{k_m}(x_m)$  とおくと、  $y_m \in U_\delta(\gamma) \subset \bar{U}^c$ 。必要な部分列をとって  $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m = \gamma$  とすると、  $\gamma \in U_\delta(\gamma) \subset \bar{U}^c$ 。  $m \rightarrow +\infty$  のとき  $k_m \rightarrow +\infty$  である。このとき  $\alpha(\gamma) \subset \bar{U}'$  が分る。  $\alpha(\gamma)$  は chain transitive である。このとき  $\alpha(\gamma) \subset F$  となり、これは定理の仮定に反する。  $\square$

Lemma 8.  $X$  が connected で  $f$  は homeo. また  $\#(R(f)/\sim) < \infty$  とする。  
 $E_1, \dots, E_p$  を repeller,  $F_1, \dots, F_q$  を attractor の集合とする。これらを  
 vertex とし  $E_i$  から  $F_j$  への edge を任意の  $\alpha > 0$  について  $E_i$  の  
 点から  $F_j$  の点への  $\alpha$ -chain が存在するとき与えることにより  
 定義される graph を  $G'$  とする。このとき  $G'$  は connected.

Proof.  $G' = G'_1 \cup \dots \cup G'_r$  ( $G'_i$  は connected で  $G'_i$ 's は互いに disjoint) とかく。必要なら並べかえて、 $E_1, \dots, E_s$  及び  
 $F_1, \dots, F_t$  が  $G'_1$  に現われる repeller と attractor の全てとする。  
 $1 \leq i \leq t$  に対し  $B_i = \{x \in X \mid \text{任意の } \alpha > 0 \text{ に対し } x \text{ から } F_i \text{ の点への } \alpha\text{-chain が存在する}\}$  とおく。容易に分るように  $B_i$  は closed。  
 $B(G'_1) = B_1 \cup \dots \cup B_t$  とおく。同様に  $B(G'_2), \dots, B(G'_r)$  を定める。 $k \neq l$  のとき  $B(G'_k) \cap B(G'_l) = \emptyset$  であることを示す。  
 もし  $x \in B(G'_k) \cap B(G'_l)$  とすると  $\#(R(f)/\sim) < \infty$  及び Th. 7. より  $E_k$  ( $1 \leq k \leq p$ ) があって任意の  $\alpha > 0$  に対し  $E_k$  の点から  $x$  への  
 $\alpha$ -chain が存在する。これは  $G'_k \cap G'_l = \emptyset$  に反する。同様に任意の  
 $x \in X, \alpha > 0$  に対して  $x$  からある  $F_k$  ( $1 \leq k \leq q$ ) への  $\alpha$ -chain が存在するから  
 $X = B(G'_1) \cup \dots \cup B(G'_r)$ 。よって  $X$  が connected だから  $r = 1$ 。  $\square$

$\#(R(f)/\sim) < \infty$  とする。また  $f$  は homeo. とする。  $E, F$  を chain component とするとき、 $E$  から  $F$  への向き付けられた edge  $\rightarrow$  を

$x \in X \setminus R(f)$  があり、 $\alpha(x) \subset E$ ,  $\omega(x) \subset F$  となるときに与える。

chain component を vertex とし  $\rightarrow$  を edge として得られる oriented graph を  $G$  とする。

Lemma 9.  $E, F$  を chain component とする。任意の  $\alpha > 0$  に対し  $E$  の点から  $F$  の点への  $\alpha$ -chain があるとき  $E$  から  $F$  への  $G$  の path がある。

Proof.  $E, F$  をそれぞれ一点に同一視してできる商空間と  $f$  からその商空間に誘導される homeo. についても graph が同様に定義できて、 $G$  に一致するから、 $E, F$  は fixed point としてよい。

$\{E_1, \dots, E_u\}$  を chain component 全ての集合とする。各  $E_i$  に開近傍  $U_i$  があって、 $K_i = f^{-1}(U_i) \cup U_i \cup f(U_i)$  は互いに disjoint になる。 $K_i$  の開近傍  $V_i$  を  $\overline{V_i} \cap \overline{V_j} = \emptyset$  ( $i \neq j$ ) となるように取る。各  $m \in \mathbb{N}$  について、 $E$  から  $F$  への  $\frac{1}{m}$ -chain  $P_m = \{x_0^m, \dots, x_{m_n}^m\}$  がある。 $P_m \in \mathcal{C}(X)$  だから必要な部分列をとって  $\lim_{k \rightarrow \infty} P_{m_k} = P \in \mathcal{C}(X)$  とすることが出来る。 $E, F$  は fixed point だから  $\overline{d}(f(P_{m_k}), P_{m_k}) < \frac{1}{m_k}$  より、 $f(P) = P$  が分る。以下概略を記す。 $x \in P \setminus F$  があり、 $\omega(x) \subset F$  となる。 $\alpha(x)$  は chain transitive だから  $1 \leq i \leq u$  があり、 $\alpha(x) \subset E_{i_1}$  となる。 $\alpha(x) \subset F$  だから  $E_{i_1} \cap P \neq \emptyset$ 。よってもし  $E_{i_1} \neq E$  なら  $y \in P \setminus R(f)$  があり、 $\omega(y) \subset E_{i_1}$  となる。よって  $\alpha(y) \subset E_{i_2}$  なる  $1 \leq i_2 \leq u$  がある。この操作は  $E_{i_j} = E$  に到るまで続けられる。しかし cycle がないので実

際  $E$  に到る。  $\square$

Th. 10  $X$  が connected,  $f$  が homeo.  $\#(R(f)/\sim) < \infty$  なる graph  $G$  は connected。

Proof. lemma 8, lemma 9 より明らか。  $\square$

Cor. 11.  $X$  が connected,  $f$  が homeo.  $2 \leq \#(R(f)/\sim) < \infty$  なる各 chain component  $E$  に対し  $x \in X \setminus E$  があって  $\alpha(x) \subset E$  または  $\omega(x) \subset E$  となる。

Proof. theorem 10 より明らか。  $\square$

### §3 the pseudo-orbit tracing property

以下  $f$  を homeomorphism とする。

$X$  の点列  $\{x_i\}$  が  $\alpha$ -pseudo-orbit ( $\alpha > 0$ ) であるとは、

$d(f(x_i), x_{i+1}) < \alpha$  が成立することとを言う。  $\{x_i\}$  が  $\varepsilon$ -trace

( $\varepsilon > 0$ ) されるとは、  $x \in X$  があって、  $d(f^i(x), x_i) \leq \varepsilon$  が成立する

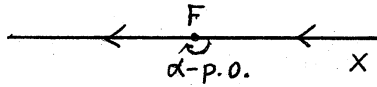
ことを言う。  $(X, f)$  が P.O.T.P. を持つとは、任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $\alpha > 0$  があって、任意の  $\alpha$ -pseudo-orbit ( $\alpha$ -p.o.) が  $\varepsilon$ -trace されることを言う。

Th. 12.  $f$  が P.O.T.P. を持つ homeo. とする。  $F$  が chain component で  $R(f)$  で open だとし、さらに  $\text{int} \{x \in X; \omega(x) \subset F\} \neq \emptyset$  なる  $F$  は attractor である。

Proof.  $F$  が attractor でないとすると、theorem 7 より  $x \in X \setminus F$



が、 $\alpha(x) \subset F$  となる。これは P.O.T.P. に矛盾する。(下図参照)

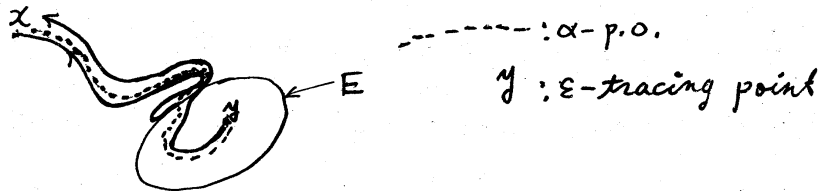


□

Th. 13.  $X$  が connected で  $f$  が P.O.T.P. を持つ homeo. で

$2 \leq \#(R(f)/\sim) < \infty$  のとき、 $E$  を chain component とすると  $\text{int } E = \emptyset$ 。

Proof. corollary 11 より  $x \in X \setminus E$  があって  $\alpha(x) \subset E$  または、  
 $\omega(x) \subset E$ 。これは P.O.T.P. に矛盾する。(下図参照)



□

Th. 14.  $f$  が P.O.T.P. を持つ homeo. とする。  $M$  を minimal set の族とする。このとき  $R(f) = \overline{\bigcup_{K \in M} K}$ 。

Proof.  $x \in R(f)$ 、 $\alpha > 0$  とする。  $x$  を通る cyclic  $\alpha$ -chain を  $\varepsilon$ -trace する点の全体は  $f$ -invariant closed set を成す。その minimal set  $K$  をとると  $d(x, K) \leq \varepsilon$  である。  $\varepsilon$  は任意だから求めることを得る。

□

Th. 15.  $f$  が P.O.T.P. を持つ homeo. で chain transitive のとき  $f$  は topologically transitive。

Proof.  $U, V$  を空でない open set とする。  $n \geq 0$  があって  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$  となることを示せばよい。  $p \in U, q \in V$  とする  $p \sim q$  だから P.O.T.P. より明か。

§4 chain mixing, P.O.T.P. and topological entropy.

Def. closed set  $Y \subset X$  が chain mixing とは  $f(Y) = Y$  で任意の  $x, y \in Y$  に対し  $\alpha > 0$  を任意にとったとき  $N \in \mathbb{N}$  があって任意の  $m \geq N$  に対し  $x$  から  $y$  への  $\alpha$ -chain  $\{x_0, \dots, x_m\} \subset Y$  が存在することを言う。  $X$  が chain mixing のとき  $f$  が chain mixing と言う。

Remark 1).  $Y$  が chain transitive とする。ある  $x, y \in Y$  に対し  $\alpha$  を任意にとったとき  $N \in \mathbb{N}$  があって任意の  $m \geq N$  に対し  $x$  から  $y$  への  $\alpha$ -chain  $\{x_0, \dots, x_m\} \subset Y$  が存在する  $\Leftrightarrow Y$  は chain mixing

2).  $F \subset X$  が chain transitive とする。  $F$  が fixed point を持てば  $F$  は chain mixing.

3).  $f|_Y$  が topologically mixing ならば  $Y$  は chain mixing

Th. 16  $X$  が connected で chain transitive のとき  $X$  は chain mixing.

Proof.  $\alpha > 0, x \in X$  を固定する。  $M(x) = \{m \in \mathbb{N} \mid x \text{ から } x \text{ への } \alpha\text{-chain で長さが } m+1 \text{ のものが存在する}\}$  とおく。  $m, m' \in M(x)$  のとき  $m+m' \in M(x)$  である。よって  $M$  の元の G.C.M. を  $m_0$  とすると、  $N \in \mathbb{N}$  があって任意の  $m \geq N$  に対して  $m_0 \cdot m \in M(x)$  となる。

$m_0 = 1$  を示せばよい。  $y, z \in X$  に対し  $y \sim_{m_0} z$  とは  $m, m' \in \mathbb{N}$  があって、  $y$  から  $z$  への長さ  $m_0 \cdot m + 1$  の  $\alpha$ -chain 及び  $z$  から  $y$  への長さ  $m_0 \cdot m' + 1$  の  $\alpha$ -chain があることとする。  $\sim_{m_0}$  が  $X$  上の

equivalence relation であることが分る。proposition 6 と同様  
 として  $\sim_m$  による各 equivalence class が open であることが分る。  
 よって、equivalence class は 1 つ、よって  $x \sim_m f(x)$  これが  $m=1$   
 が分る。  $\square$

Th. 17.  $f$  が P. O. T. P. を持つ homeo. とする。  $\varepsilon > 0, \alpha > 0$  を任意の  
 $\alpha$ -p.o. が  $\varepsilon$ -trace されるように固定する。  $\{P_1, \dots, P_m\} \subset X$  が  
 $d(P_k, P_l) > 2\varepsilon$  ( $k \neq l$ ) を満たすとする。  $m \in \mathbb{N}$  を固定する。  $P_k$  から  
 $P_l$  への長さ  $m+1$  の  $\alpha$ -chain があるとき、  $A_{kl} = 1$  とおき、それ  
 以外するとき  $A_{kl} = 0$  とおく、 ( $1 \leq k, l \leq m$ )。このとき closed set  
 $Y \subset X$ 、及び continuous surjection  $\pi: Y \rightarrow \Sigma_A$  があって  $f^m(Y) = Y$   
 であり  $\sigma_A \circ \pi = \pi \circ f^m|_Y$  となる。ここで  $(\Sigma_A, \sigma_A)$  は transition  
 matrix  $A$  を持つ subshift of finite type。

Proof.  $P = \{P_1, \dots, P_m\}$  とおく  $a \in \mathbb{N}$  に対し、

$$\Sigma_A^a = \{(x_{-a}, \dots, x_a) \in P^{2a+1}; x_i = P_k, x_{i+1} = P_l \text{ なら } A_{kl} = 1\}$$

とおく。  $x \in \Sigma_A^a$  に対し  $P(x) = \bigcap_{i=-a}^a f^{-im}(B_\varepsilon(x_i))$  とおく、このとき  
 $P(x) \neq \emptyset$ 。また  $d(P_k, P_l) > 2\varepsilon$  ( $k \neq l$ ) より  $x, x' \in \Sigma_A^a, x \neq x'$  な  
 ら  $P(x) \cap P(x') = \emptyset$ 。  $Y_a = \bigcup_{x \in \Sigma_A^a} P(x)$  とおき  $Y = \bigcap_{a=1}^\infty Y_a$  とおく。  
 $Y$  は closed であり  $f^m(Y) = Y$ 。  $\Sigma_A = \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in P^{\mathbb{Z}}; x_i = P_k, x_{i+1} = P_l$   
 なら  $A_{kl} = 1, \forall i \in \mathbb{Z}\}$  とおく。  $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_A$  に対し  $\sigma_A((x_i)_{i \in \mathbb{Z}}) =$   
 $(x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$  により  $\sigma_A: \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$  が定義される。  $x \in \Sigma_A$  に対し  
 $P(x) = \bigcap_{i=-\infty}^\infty f^{-im}(B_\varepsilon(x_i))$  ( $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ) とおく。このとき

$x, x' \in \Sigma_A^a$  について  $x \neq x'$  ならば  $P(x) \cap P(x') = \emptyset$  であるから、 $Y = \bigcup_{x \in \Sigma_A} P(x)$  が成立する。異なった  $x, x' \in \Sigma_A$  に対し  $P(x) \cap P(x') = \emptyset$  であるから、 $\pi: Y \rightarrow \Sigma_A$  を  $\pi(P(x)) = \{x\}$  ( $x \in \Sigma_A$ ) で定義することからできる。  $\pi$  が continuous であることを示せばよい。  $\beta = \min_{k \neq l} d(p_k, p_l) - 2\varepsilon > 0$  とおく。  $a \in \mathbb{N}$  を任意にとったとき、  $\delta > 0$  が存在し、  $d(y, y') < \delta$  ( $y, y' \in Y$ ) ならば  $\pi(y) = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ,  $\pi(y') = (x'_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  と書いたとき、  $x_i = x'_i$  ( $\forall i$  s.t.  $|i| \leq a$ ) であることを示せばよい。

そこで  $\delta > 0$  を  $d(y, y') < \delta$  ならば  $d(f^{jm}(y), f^{jm}(y')) < \beta$  ( $|j| \leq a$ ) となるようにとる。今  $j$  ( $|j| \leq a$ ) があって  $x_j \neq x'_j$  とする。このとき、 $2\varepsilon + \beta \leq d(x_j, x'_j) \leq d(x_j, f^{jm}(y)) + d(f^{jm}(y), f^{jm}(y')) + d(f^{jm}(y'), x'_j) < \varepsilon + \beta + \varepsilon = 2\varepsilon + \beta$ 、となり矛盾が生じる。

よって  $\pi$  は continuous。 □

Cor. 18.  $f$  が P.O.T.P. を持つ homeo. で chain mixing chain component  $F$  があって  $\#F > 1$  とすると  $h(f) > 0$ 。

Proof.  $\{p_1, p_2\} \subset F$  を  $p_1 \neq p_2$  となるようにとる。  $\varepsilon = d(p_1, p_2)/3 > 0$  とおく。  $\alpha > 0$  を任意の  $\alpha$ -P.O. が  $\varepsilon$ -trace されるようにとる。  $f|_F$  が chain mixing であるから  $m > 0$  があって各  $i, j = 1, 2$  について  $p_i$  から  $p_j$  への長さ  $m+1$  の  $\alpha$ -chain がある。よって  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  とすると、theorem 17 から closed set  $Y \subset X$  と continuous surjection  $\pi: Y \rightarrow \Sigma_A$  があって  $f^m(Y) = Y$ ,  $\sigma_A \circ \pi = \pi \circ f^m|_Y$  となる。

よって、 $h(f) = \frac{1}{m} h(f^m) \geq h(f^m|_Y) \geq \frac{1}{m} h(\sigma_A) = \frac{1}{m} \log 2 > 0$ 。 □

Cor. 19.  $f$  が P.O.T.P. を持つ homeo. で点  $P, q \in X$  ( $P \neq q$ ) があつて  $f(P) = P$ ,  $P \sim q$  とする。このとき  $h(f) > 0$ 。

Proof.  $P$  を含む chain component は  $P$  が fixed point だから chain mixing でありまた  $q$  を含む。よつて corollary 18 より  $h(f) > 0$ 。□

Th. 20.  $f$  が P.O.T.P. を持つ homeo. で  $h(f) = 0$  とする。このとき各  $m \in \mathbb{N}$  に対して  $\text{Fix}(f^m) = \{x \in X \mid f^m(x) = x\}$  は totally disconnected。

Proof.  $m \in \mathbb{N}$  を固定する。  $\text{Fix}(f^m)$  の connected component  $K$  が一点でないとする。  $R(f^m|_K) = K$  で  $K$  は connected だから proposition 6 より  $K$  は chain transitive. よつて theorem 16 より  $K$  は chain mixing よつて  $f^m$  にかんする chain component  $E$  で  $K$  を含むものは chain mixing で  $\#E > 0$ 。  $f^m$  は P.O.T.P. を持つから corollary 18 より  $h(f^m) > 0$ 。よつて  $h(f) > 0$  で矛盾が生じる。よつて  $K$  は一点から成る。□

Th. 21.  $X$  が connected で  $f$  は homeo. とする。  $f$  の periodic point の集合が  $X$  で dense であり、  $\#X > 1$  であれば  $h(f) > 0$ 。

Proof.  $\text{Per}(f)$  を  $f$  の periodic point の集合とすると、  $X = \overline{\text{Per}(f)}$  となる。  $R(f) \supset \text{Per}(f)$  だから、  $X = R(f)$ 。よつて proposition 6 より  $X$  は chain transitive. よつて theorem 16 より  $f$  は chain mixing.  $\#X > 0$  だから corollary 18 より  $h(f) > 0$ 。□

$(X, f)$  を homeo. とする。 closed set  $K \subset X$  が  $f(K) = K$  を満た

すとする。  $K$  を一点に同一視して得られる空間を  $X/K$  とし、  
 $\pi: X \rightarrow X/K$  を *natural projection* とする。  $X/K$  上の *metric*  $d_K$   
 を  $x, y \in X$  に対して  $d_K(\pi(x), \pi(y)) = \min \{d(x, y), d(x, K) + d(y, K)\}$   
 で定めることができる。  $f_K: X/K \rightarrow X/K$  を  $f_K \circ \pi = \pi \circ f$  と  
 なるように定める。 このとき  $f_K$  は *homeo.* となる。

Th. 22. *closed set*  $K \subset X$  が *chain mixing* とするとき、  $f$  が  
 P.O.T.P. を持てば、  $f_K$  も P.O.T.P. を持つ。

まず次の *lemma* を示す。

Lemma 23.  $f$  が *chain mixing* とする。  $\alpha > 0$  に対して  $N \in \mathbb{N}$  があ  
 って任意の  $p, q \in X$  及び  $m \geq N$  に対し  $p$  から  $q$  への長さ  $m+1$  の  
 $\alpha$ -chain がある。

*Proof.*  $(p, q) \in X \times X$  を任意に固定する。  $N(p, q) \in \mathbb{N}$  があ  
 って任意の  $m \geq N(p, q)$  に対し、  $p$  から  $q$  への  $\alpha/2$ -chain  
 $\{x_0, \dots, x_m\}$  がある。  $0 < \delta < \frac{\alpha}{2}$  を  $d(x, y) < \delta$  なら  $d(f(x), f(y)) < \alpha/2$  と  
 なるようにとる。  $U_\delta(p) = \{x \mid d(p, x) < \delta\}$  とおくと、  $(p', q') \in$   
 $U_\delta(p) \times U_\delta(q)$  に対し、  $\{p', x_1, \dots, x_{m-1}, q'\}$  は  $\alpha$ -chain である。  
 $(p_1, q_1), \dots, (p_m, q_m) \in X \times X$  があって  $X \times X = \bigcup_{i=1}^m U_\delta(p_i) \times U_\delta(q_i)$  と  
 なる。  $N = \max_{i=1, \dots, m} N(p_i, q_i)$  とおくと、これは条件を満たす。  $\square$

Th. 22. の proof.  $\varepsilon > 0$  を任意に固定する。  $0 < \delta \leq \varepsilon$  を  $f$  によ  
 る任意の  $\alpha$ -p.o. が  $\varepsilon$ -trace されるようにとる。 *Lemma 23* より、  
 $n \in \mathbb{N}$  があって任意の  $x, y \in K$  と  $m \geq n$  に対して  $x$  から  $y$  への

$\delta/2$ -chain  $\{x_0, \dots, x_m\} \subset K$  がある。  $0 < \alpha < \delta/2$  を  $d(x, K) < \alpha$  なる  $x_0 = x$  なる任意の  $\alpha$ -p.o.  $\{x_0, \dots, x_m\}$  に対し  $d(x_i, K) < \delta/2$  ( $0 \leq i \leq m$ ) が成り立つようにとる。  $\{x'_0, \dots, x'_l\} \subset X/K$  を  $f_K$  による  $\alpha$ -p.o. とするとき、これがある  $\pi(x)$  ( $x \in X$ ) により  $2\delta$ -trace されることを示す。点列  $\{x_0, \dots, x_l\} \subset X$  を  $\pi(x_i) = x'_i$  となるようにとる。  $d(x_i, K) < \alpha$  のとき  $x_i, \dots, x_{i+m-1}$  を記号  $*$  で置きかえて列  $\{\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_l\}$  を作る。もし  $\tilde{x}_{i-1} \neq *, \tilde{x}_{i+l} \neq *, \tilde{x}_{i+j} = *$   $0 \leq j < l$  なる  $l \geq m$  とする。  $\tilde{x}_{i+l} = x_{i+l}$  で  $d(x_{i+l}, K) < \delta/2$  となることに注意する。このとき

$$d(f(x_{i-1}), K) < \begin{cases} \alpha & \text{if } d(x_i, f(x_{i-1})) \geq d(x_i, K) + d(f(x_{i-1}), K) \\ & \text{--- (i)} \\ 2\alpha & \text{if } d(x_i, f(x_{i-1})) < d(x_i, K) + d(f(x_{i-1}), K) \\ & \text{--- (ii)} \end{cases}$$

となることを示す。(i) のとき、 $d_K(\pi(x_i), \pi(f(x_{i-1}))) = d(x_i, K) + d(f(x_{i-1}), K)$ 。よって  $d(f(x_{i-1}), K) \leq d_K(\pi(x_i), \pi(f(x_{i-1}))) = d_K(x'_i, f_K(x'_{i-1})) < \alpha$ 。(ii) のとき  $d_K(\pi(x_i), \pi(f(x_{i-1}))) = d(x_i, f(x_{i-1}))$ 。よって

$$\begin{aligned} d(f(x_{i-1}), K) &\leq d(f(x_{i-1}), x_i) + d(x_i, K) \\ &= d_K(\pi(x_i), \pi(f(x_{i-1}))) + d(x_i, K) \\ &= d_K(x'_i, f_K(x'_{i-1})) + d(x_i, K) < \alpha + \alpha = 2\alpha. \end{aligned}$$

よって  $d(f(x_{i-1}), p) < 2\alpha$  なる  $p \in K$  が存在する。また  $d(x_{i+l}, K) < \delta/2$  なる  $d(x_{i+l}, q) < \delta/2$  なる  $q \in K$  がある。 $p$  から  $q$  への  $\frac{\delta}{2}$ -p.o.  $\{y_i, \dots, y_{i+l}\}$  を固定する。 $\tilde{x}_j, i \leq j < i+l$  を  $y_j$  で置きか

える。このとき、 $d(f(\tilde{x}_{i-1}), y_i) = d(f(x_{i-1}), p) < 2\alpha < \delta$ 。また

$$\begin{aligned} d(f(y_{i+k-1}), \tilde{x}_{i+k}) &\leq d(f(y_{i+k-1}), y_{i+k}) + d(y_{i+k}, \tilde{x}_{i+k}) \\ &< \frac{\delta}{2} + d(q, x_{i+k}) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta. \end{aligned}$$

上のような全ての  $i$  について上の操作をしてできる列を、

$\{\bar{x}_a, \dots, \bar{x}_b\}$  とかくと、これは  $f$  による  $\delta$ -p.o. になる。これを  $\varepsilon$ -trace する点を  $x$  とする。

$\pi(\bar{x}_j) = x'_j$  とする。このとき  $\bar{x}_j \in K$  であり、 $j = i+a$  ( $0 \leq i \leq b-a$ ) とすると、

$$\begin{aligned} d_K(f_K^i(\pi(x)), x'_{i+a}) &\leq d_K(f_K^i(\pi(x)), \pi(\bar{x}_{i+a})) \\ &\quad + d_K(\pi(\bar{x}_{i+a}), x'_{i+a}) \\ &\leq d(f^i(x), \bar{x}_{i+a}) + d(K, x_j) \\ &\leq \varepsilon + \frac{\delta}{2} < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

$\pi(\bar{x}_j) = x'_j$  とする。このとき  $j = i+a$  とすると、

$$d_K(f_K^i(\pi(x)), x'_{i+a}) \leq d(f^i(x), \bar{x}_{i+a}) \leq \varepsilon.$$

よって  $\{x'_a, \dots, x'_b\}$  は  $\pi(x)$  に  $2\varepsilon$ -trace される。  $\square$

Cor. 24.  $M$  is compact Riemannian manifold,  $g: M \rightarrow M$  is Axiom A diffeo. とする  $g$  が P.O.T.P. を持つとは  $g$  は no-cycle property を持つ。

Proof.  $m \geq 1$  があって  $g^m$  の basic sets  $X_1, \dots, X_m$  は top. mixing になる。  $g^m$  が no-cycle property を持つことを示せばよい。各  $X_i$  を一点  $x_i$  に同一視して得られる空間を  $X$  とし、



$f: X \rightarrow X$  を  $g^n$  から誘導される homeo. とする。  $f$  は P.O.T.P. を持つ。

各  $x_i$  について  $W^s(x_i) = \{y \in X; f^m(y) \rightarrow x_i \text{ as } m \rightarrow +\infty\}$

$W^u(x_i) = \{y \in X; f^{-m}(y) \rightarrow x_i \text{ as } m \rightarrow +\infty\}$

とおくと、  $g^n$  が cycle を持つば、  $x_{i_0}, \dots, x_{i_m} = x_{i_0}$  があり、

$\exists q_j \in W^u(x_{i_j}) \cap W^s(x_{i_{j+1}})$  も  $\neq \emptyset$  となる。  $q_j \neq x_{i_0}, \dots, x_{i_m}$  とする

ことが出来る。  $q_0 \sim x_0$  で  $f(x_0) = x_0$  だから、 corollary 19 より

$h(f) > 0$ 。一方  $\Omega(f) = \{x_0, \dots, x_m\}$  だから  $h(f) = h(f|_{\Omega(f)}) = 0$ 。

これは矛盾。  $\therefore g^n$  は cycle を持たない。 □

## REFERENCE

[1] L. Block and J.E. Franke, The chain recurrent sets, attractors, and explosions, Ergod. Th. & Dynam. Sys. Vol. 5, (1985), 321-327.

[2] M. Hurley, Consequence of topological stability, J. Differentiable Equations Vol. 54, (1984), 60-72.

[3] C. Robinson, Stability theorems and hyperbolicity in dynamical systems, Rocky Mountain J. Math. Vol. 7, (1977), 425-437.